

Equation différentielle 1^{er} ordre

- Homogène (sans second membre)

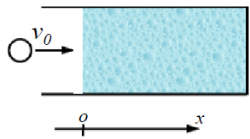
$$\frac{dy}{dt} + ay = 0 \quad \text{avec } a = \text{cte}$$

$$\text{Solution : } y = y_0 e^{-at}$$

y_0 est déterminée par les conditions initiales

Exemple :

Exemple 1: un objet se déplace suivant Ox avec une vitesse initiale v_0 . En $x=0$ il subit une force de frottement fluide en régime laminaire qui le ralentit. Quelle est l'expression de la vitesse en fonction du temps lors de la phase de ralentissement. (on néglige ici la pesanteur)



2nd loi de Newton: $m a = F_f$

On projette sur Ox : $m a = -K\eta v$ ou encore $a = -\lambda v$ avec $\lambda = K\eta/m$

Nous avons alors l'équation suivante:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -\lambda v(t) \quad \text{Equation différentielle du 1^{er} ordre}$$

$$\text{Résolution: } \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{v} = -\lambda \int_0^t dt \Rightarrow [\ln(v(t)) - \ln(v_0)] = -\lambda[t - 0]$$

$$\ln \frac{v(t)}{v_0} = -\lambda t \xrightarrow{\exp} e^{\ln \frac{v(t)}{v_0}} = e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{v(t)}{v_0} = e^{-\lambda t}$$

Et finalement: $v(t) = v_0 e^{-\lambda t}$

$$\text{Equation : } \frac{dv}{dt} + \lambda v = 0$$

$$\text{Solution : } v = v_0 e^{-\lambda t}$$

Détermination de v_0 :

$$v(t=0) = v_0$$

Equation différentielle 1^{er} ordre

- Avec second membre

$$\frac{dy}{dt} + ay = b \quad \text{avec } a \text{ et } b = cte$$

Solution : $y = y_p + y_1 e^{-at}$

solution particulière
déterminée pour $t \rightarrow \infty$

solution générale de l'équation
différentielle sans second membre ($b=0$)
 y_1 est une constante déterminée par les
conditions initiales

Exemple :

Exemple 2: chute libre (suite)

Equation différentielle: $\frac{dv(t)}{dt} + \lambda v(t) - g = 0$ avec $v(t) = v_{lim}(t \rightarrow \infty) + v_1 e^{-\lambda t}$

• On injecte $v(t)$ dans l'équation $\frac{dv(t)}{dt} + \lambda v(t) - g = 0$

$$\text{on trouve } -\lambda v_1 e^{-\lambda t} + \lambda v_{lim} + \lambda v_1 e^{-\lambda t} - g = 0 \Rightarrow v_{lim} = g/\lambda$$

$$d'où v(t) = g/\lambda + v_1 e^{-\lambda t}$$

• On détermine v_1 avec la condition initiale $v(t=0) = 0 \Rightarrow v_1 = -g/\lambda$

La vitesse en fonction de t s'écrit $v(t) = g/\lambda(1 - e^{-\lambda t})$

$$\text{Equation : } \frac{dv}{dt} + \lambda v = g$$

$$\text{Solution : } v = v_p + v_1 e^{-\lambda t}$$

v_1 est une constante

$$\text{Détermination de } v_p : v(t \rightarrow \infty) = v_p = v_{lim}$$

$$\text{Détermination de } v_1 : v(t=0) = v_p + v_1$$

$$v_1 = v(t=0) - v_p$$